Fonctions usuelles

I. Bijection

I et J désignent des intervalles non singuliers de $\mathbb{R}$.

1°) Définition

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f réalise une bijection de I vers J ssi $\forall y \in J, \exists ! x \in I$ tel que $y = f(x)$. On pose alors $x = f^{-1}(y)$ ce qui définit une application f^{-1} au départ de J. f^{-1} est appelée application réciproque de f.

Prop : f^{-1} est une bijection de J vers I et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Prop : $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$.

2°) Propriétés

Théorème :

Soit f une bijection de I vers J.

Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Cor : Si f est impaire alors f^{-1} l'est aussi.

Cor : Si f est une bijection continue et strictement monotone alors f^{-1} est aussi continue et de même monotonie que f.

Prop : Si f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

3°) Radicaux

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Posons $I = \mathbb{R}^+$ si n est pair et $I = \mathbb{R}$ si n est impair

Considérons la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

f est continue, dérivable, $f'(x) > 0$ sauf pour $x = 0$ donc f est strictement croissante.

Si n est pair :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

,

Si n est impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dans les deux cas f est une bijection de I vers I.

Déf : On note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ l'application réciproque de la bijection $x \mapsto x^n$ de I vers I.

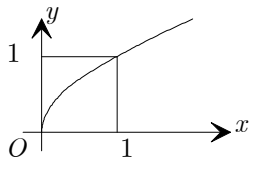
Théorème :

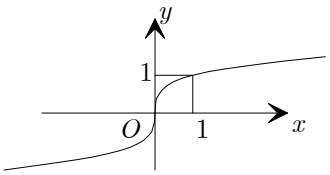
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur I.

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et pour $x \neq 0$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.

De plus, quand n est impair, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est impaire.

Allure : Cas n pair : Cas n impair :





II. Puissances et logarithmes

1°) Logarithme népérien

Déf : On note $\ln : \mathbb{R}^+* \to \mathbb{R}$ la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\forall x > 0, \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Théorème :

ln est définie, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+*$ et $(\ln x)' = 1/x$.

Prop : $\forall x, y > 0, \ln(xy) = \ln x + \ln y$,

$\forall x > 0, \ln(1/x) = -\ln x$,

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln x$.

Prop : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$.

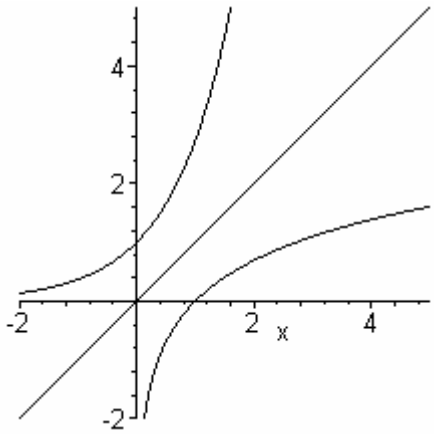
2°) Exponentiel népérien

Déf : On note $x \mapsto \exp x$ l'application réciproque de la bijection $x \mapsto \ln x$ de $\mathbb{R}^+*$ vers $\mathbb{R}$.

Théorème :

exp est définie, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0^+$ et

$(\exp x)' = \exp x$.



Prop : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = \exp(x)^n$.

Déf : On appelle nombre de Neper,
le nombre $\mathrm{e} = \exp(1) = 2,71828$ à 10^{-5} près.

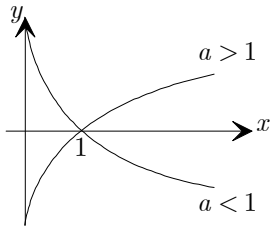
3°) Logarithme en base a

Déf : Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.

On appelle logarithme en base a l'application

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{cases}.$$

En particulier $\ln = \log_{\mathrm{e}}$.



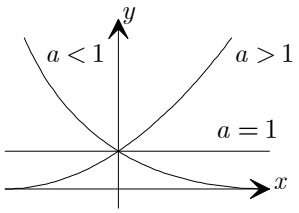
Prop : $\forall x, y > 0, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a(a) = 1$.

4°) Exponentielle en base a

Déf : Soit $a \in \mathbb{R}^+*$. On appelle exponentielle

en base a l'application $\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+* \\ x \mapsto \exp(x \ln a) \end{cases}$.

En particulier $\exp = \exp_{\mathrm{e}}$.

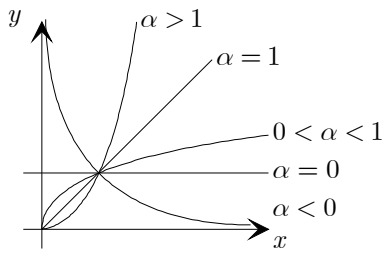


Déf : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on note $a^x = \exp_a(x)$.

Prop : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a, b > 0$: $a^0 = 1, 1^x = 1$,

$a^x . a^y = a^{x+y}$, $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

5°) Fonctions puissances



Déf : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle fonction puissance d'exposant α l'application : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \end{cases}$.

Prop : Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$.

Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$.

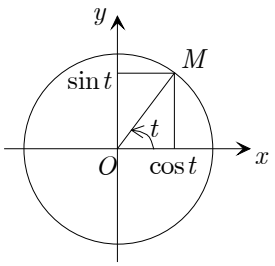
6°) Limites de référence

Prop : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$.

Prop : $\forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0^+$.

III. Fonctions trigonométriques

1°) Fonctions sinus et cosinus



Soit $t \in \mathbb{R}$ et M_t le point du cercle trigonométrique déterminé par $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = t \quad [2\pi]$.

Déf : L'abscisse et l'ordonné de M sont notées : $\cos t$ et $\sin t$.
On définit ainsi deux fonctions cos et sin de $\mathbb{R}$ vers $[-1,1]$.

$OM_t^2 = 1$ donne $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$M_{t+2\pi} = M_t$ donne $\cos(t+2\pi) = \cos t$ et $\sin(t+2\pi) = \sin t$.

$M_{-t} = s_{(Ox)}(M_t)$ donne $\cos(-t) = \cos t$ et $\sin(-t) = -\sin t$.

$M_{\pi - t} = s_{(Oy)}(M_t)$ donne $\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$.

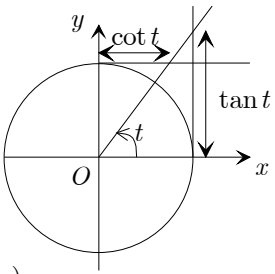
$M_{t+\pi} = s_O(M_t)$ donne $\cos(\pi + t) = -\cos t$ et $\sin(\pi + t) = -\sin t$.

$M_{\pi/2 - t} = s_\Delta(M_t)$ donne $\cos(\pi/2 - t) = \sin t$ et $\sin(\pi/2 - t) = \cos t$.

Les fonctions sin et cos sont $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}, (\cos t)' = -\sin t$ et $(\sin t)' = \cos t$.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos t$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\sin t$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1

2°) Fonctions tangente et cotangente



Déf : La fonction tan est définie pour tout $t \neq \pi/2 \quad [\pi]$ par $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

Prop : tan est une fonction impaire, π périodique et $\mathcal{C}^\infty$ avec $(\tan t)' = \dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$.

Déf : La fonction cot est définie pour tout $t \neq 0 \quad [\pi]$ par $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.

Prop : cot est une fonction impaire, π périodique et $\mathcal{C}^\infty$ avec $(\cot t)' = \dfrac{-1}{\sin^2 t} = -1 - \cot^2 t$.

3°) Formules de trigonométrie

a) développement

Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$:

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$,

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$, $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$,

$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a\tan b}{1-\tan a\tan b}$ (sous réserve d'existence),

$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$ (sous réserve d'existence),

$\cos 2a=2\cos^2 a-1=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a$,

$\sin 2a=2\sin a\cos a$, $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ (sous réserve d'existence).

b) factorisation

$\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

De même :

$\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$,

$\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ et

$\sin p-\sin q=2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

En particulier $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$ et $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

c) formules d'Euler et de Moivre

$\forall t\in\mathbb{R},\mathrm{e}^{it}=\cos t+i.\sin t$ d'où $\cos t=\dfrac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}$ et $\sin t=\dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}$.

$\forall n\in\mathbb{Z},(\cos t+i.\sin t)^n=\cos nt+i.\sin nt$.

d) linéarisation

On veut transformer une expression comportant des produits de sin et/ou cos de sorte de faire disparaître ceux-ci. Pour cela on remplace cos et sin en exponentielles imaginaires, on développe puis on recombine les exponentielles imaginaires en cos et sin .

e) formules de l'angle moitié

Prop : Soit $x\neq\pi\quad[2\pi]$ et $t=\tan x/2$. $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Si de plus $x\neq\pi/2\quad[\pi]$: $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

4°) Equations trigonométriques

Pour $x,\theta\in\mathbb{R}$:

$$\cos x=\cos\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=\theta\quad[2\pi]\\ \text{ou}\\ x=-\theta\quad[2\pi]\end{cases},\ \sin x=\sin\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=\theta\quad[2\pi]\\ \text{ou}\\ x=\pi-\theta\quad[2\pi]\end{cases}\ \text{et}\ \tan x=\tan\theta\Leftrightarrow x=\theta\quad[\pi].$$

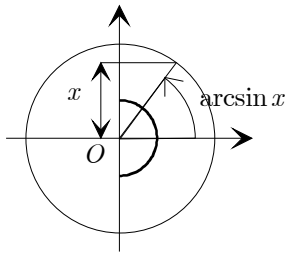
Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, on veut résoudre l'équation $a\cos x+b\sin x=c$.

Prop : $\forall a,b\in\mathbb{R}$, on peut transformer $a\cos x+b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$ avec $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi\in\mathbb{R}$ bien choisi.

IV. Fonctions trigonométriques réciproques

1°) Fonction arc sinus

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	1



L'application $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ est une bijection donc
$\forall x \in [-1,1], \exists! t \in [-\pi/2, \pi/2], \sin t = x$.

Déf : On note $\arcsin x = t$ ce qui définit $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ application réciproque de la bijection $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$.
Ainsi $\forall x \in [-1,1], \arcsin x$ est l'angle de $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus vaut x.

Tableau de valeurs :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Théorème :
La fonction arcsin est impaire, strictement croissante, continue sur $[-1,1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Prop : $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin x) = x$

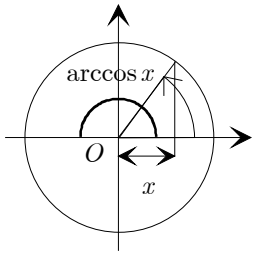
$\forall x \in [-1,1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$,

$\forall x \in]-1,1[, \tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Prop : $\forall t \in [-\pi/2, \pi/2], \arcsin(\sin t) = t$.

2°) Fonction arc cosinus

x	0		π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1



L'application $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$ est une bijection donc
$\forall x \in [-1,1], \exists! t \in [0, \pi], \cos t = x$.

Déf : On note $\arccos x = t$ ce qui définit $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ application réciproque de la bijection $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$.
Ainsi $\forall x \in [-1,1], \arccos x$ est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x.

Tableau de valeurs :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos x$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Théorème :
La fonction arccos est strictement décroissante, continue sur $[-1,1]$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Prop : $\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos x) = x$.

$\forall x \in [-1,1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

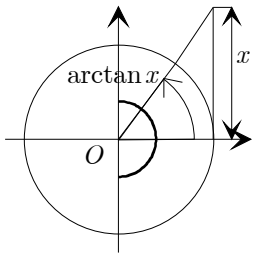
$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Prop : $\forall t \in [0,\pi], \arccos(\cos t) = t$.

Prop : $\forall x \in [-1,1]$ on a : $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

3°) Fonction arc tangente

x	$-\infty$		$+\infty$
$\arctan x$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$



L'application $\tan :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ est une bijection donc
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! t \in]-\pi/2,\pi/2[, \tan t = x$.

Déf : On note $\arctan x = t$ ce qui définit $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2,\pi/2[$ application réciproque de la bijection $\tan :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan x$ est l'angle de $]-\pi/2,\pi/2[$ dont la tangente vaut x .

Tableau de valeurs :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Théorème :

La fonction arctan est impaire, strictement croissante $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Prop : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Prop : $\forall t \in]-\pi/2,\pi/2[, \arctan(\tan t) = t$.

Prop : $\forall x > 0, \arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$

$\forall x < 0, \arctan x + \arctan 1/x = -\pi/2$.

V. Fonctions hyperboliques

1°) Fonction cosinus et sinus hyperboliques

Déf : On définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques par :

$$\mathrm{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{ch}\, t = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \end{cases} \text{ et } \mathrm{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{sh}\, t = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} \end{cases}.$$

Théorème :

La fonction ch est paire, $\mathcal{C}^\infty$ et $(\mathrm{ch}\, t)' = \mathrm{sh}\, t$.

La fonction sh est impaire, $\mathcal{C}^\infty$ et $(\mathrm{sh}\, t)' = \mathrm{ch}\, t$.

Tableaux de variation :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}\, t$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

et

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}\, t$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

.

2°) Trigonométrie hyperbolique

Théorème :

$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$.

Cor : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, t = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}$.

Prop : $\forall a,b\in\mathbb{R}$:

$\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$

$\operatorname{ch}(a-b)=\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)-\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$

$\operatorname{sh}(a+b)=\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$

$\operatorname{sh}(a-b)=\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)-\operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$

$\operatorname{ch}(2a)=\operatorname{ch}^2(a)+\operatorname{sh}^2(a)=2\operatorname{ch}^2 a-1=1+2\operatorname{sh}^2 a$

$\operatorname{sh}(2a)=2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a)$

3°) Fonction tangente hyperbolique

Déf : On définit la fonction tangente hyperbolique par : $\operatorname{th}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \operatorname{th}t=\dfrac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\end{cases}$.

Théorème :

La fonction th est impaire, $\mathcal{C}^\infty$ et $(\operatorname{th}t)'=1-\operatorname{th}^2 t=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

4°) Fonctions hyperboliques réciproques

a) fonction argument sinus hyperbolique

L'application $\operatorname{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une bijection croissante : $\forall x\in\mathbb{R},\exists!t\in\mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh}t=x$.

Déf : On note $\operatorname{argsh}x=t$ ce qui définit $\operatorname{argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ application réciproque de la bijection $\operatorname{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Tableau de variation et allure

Prop : $\forall x\in\mathbb{R},\operatorname{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Prop : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(\operatorname{argsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Prop : $\forall x\in\mathbb{R},\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}x)=x$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}x)=\sqrt{1+x^2}$ et $\operatorname{th}(\operatorname{argsh}x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) fonction argument cosinus hyperbolique

L'application $\operatorname{ch}:\mathbb{R}^+\to[1,+\infty[$ est une bijection croissante : $\forall x\in[1,+\infty[,\exists!t\in[0,+\infty[$ tel que $\operatorname{ch}t=x$.

Déf : On note $\operatorname{argch}x=t$ ce qui définit $\operatorname{argch}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ application réciproque de la bijection $\operatorname{ch}:[0,+\infty[\to[1,+\infty[$

Prop : $\forall x\in[1,+\infty[,\operatorname{argch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Prop : Pour $x\in]1,+\infty[$, $(\operatorname{argch}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Prop : $\forall x\in\mathbb{R},\operatorname{ch}(\operatorname{argch}x)=x$, $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}x)=\sqrt{x^2-1}$ et $\operatorname{th}(\operatorname{argch}x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

c) fonction argument tangente hyperbolique

L'application $\operatorname{th}:\mathbb{R}\to]-1,1[$ est une bijection croissante : $\forall x\in]-1,1[,\exists!t\in\mathbb{R}$ tel que $\operatorname{th}t=x$.

Déf : On note $\operatorname{argth}x=t$ ce qui définit $\operatorname{argth}:]-1,1[\to\mathbb{R}$ application réciproque de la bijection $\operatorname{th}:\mathbb{R}\to]-1,1[$.

Prop : $\forall x\in\mathbb{R},\operatorname{argth}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Prop : Pour $x\in]-1,1[$, $(\operatorname{argth}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$.